Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Национални зимни математически състезания „Атанас Радев“

Плевен, 31 януари 2021 г.

София, 2021 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Реалните числа x, y изпълняват равенството

$$x^2y^3 - x^2y^2 + x^2y + 2xy^2 - x^2 - 4xy + y = 3.$$

Намерете всички възможни стойности на y.

Решение. Подреждаме по степените на x:

$$(y^3 - y^2 + y - 1)x^2 + (2y^2 - 4y)x + y - 3 = 0.$$

Ако $0 \neq y^3 - y^2 + y - 1 = (y-1)(y^2+1)$ (което се случва при $y \neq 1$, понеже $y^2 + 1 > 0$), то уравнението е квадратно относно x, при което условието е еквивалентно на неравенството за съкратената дискриминанта:

$$D' = y^4 - 4y^3 + 4y^2 - (y-3)(y^3 - y^2 + y - 1) \geq 0$$

$$y^4 - 4y^3 + 4y^2 - y^4 + y^3 - y^2 + y + 3y^3 - 3y^2 + 3y - 3 \geq 0$$

$$4y \geq 3,$$

така че в този случай реално x съществува при $y \geq \frac{3}{4}$ $(y \neq 1)$.
Ако $y = 1$, то уравнението има вида $-2x - 2 = 0$ и $x = -1$, т.е. и тук реално x съществува.
Отговор: Всички $y \geq \frac{3}{4}$.
Оценяване. (6 точки) 1 т. за подреждане по степените на x; 2 т. за правилно изследване на линейния случай; 1 т. за правилно записване на дискриминантата; 2 т. за намиране условието $y \geq \frac{3}{4}$ $(y \neq 1)$ в квадратния случай.

Задача 8.2. В равностранен триъгълник ABC със страна 4 см точките D_1, D_2, D_3 са от страната AB и $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3B = 1$ см. Точка E е на страната AC и $CE = 1$ см. Пресметнете сбора $\measuredangle ED_1C + \measuredangle ED_2C + \measuredangle ED_3C$.

Решение. Да означим $\measuredangle ED_1C = \alpha$, $\measuredangle ED_2C = \beta$, $\measuredangle ED_3C = \gamma$. Построяваме точка F на страната BC така, че $CF = 1$ см. Четириъгълникът AD_1FE е успоредник. От симетрията $\measuredangle CD_1F = \gamma$ и $\measuredangle ED_1F = \alpha + \gamma = \measuredangle AED_1$. От успоредника D_1D_2FE, $\measuredangle ED_2F = 2\beta = \measuredangle D_1ED_2$. Накрая $\measuredangle D_2ED_3 = \measuredangle D_3FB = \alpha + \gamma = \measuredangle FD_3E$. Следователно $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 60^\circ$ и $\alpha + \beta + \gamma = 30^\circ$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за построяване точка F; 1 т. за изразяване на $\measuredangle AED_1 = \alpha + \gamma$; 1 т. за изразяване на $\measuredangle D_1ED_2 = 2\beta$; 1 т. за изразяване на $\measuredangle D_2ED_3 = \alpha + \gamma$; 2 т. за завършване.

Задача 8.3. Да се реши в естествени числа уравнението

$$x^2.3^y = 2021 + 2^z.$$

Решение. По модул 3 имаме $2^z \equiv 1$, така че z е четно; нека $z = 2m$. Сега по модул 4 имаме $x^2.3^y \equiv 1$, така че y е четно; нека $y = 2n$.

$$x^2.3^{2n} - 2^{2m} = 2021$$

$$(x.3^n + 2^m)(x.3^n - 2^m) = 43.47$$

Тъй като първият множител е положителен и по-голям от втория, вариантите са:
А. $x.3^n + 2^m = 2021$, $x.3^n - 2^m = 1$, $2.2^m = 2020$, което е невъзможно.
Б. $x.3^n + 2^m = 47$, $x.3^n - 2^m = 43$, $2.2^m = 4$, $m = 1$, $2x.3^n = 90$, което е валидно за $(x; n) = (5; 2)$ и $(15; 1)$. Съответно $(x; y; z) = (5; 4; 2)$ и $(15; 2; 2)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за доказване, че z е четно; 1 т. за доказване, че y е четно; 1 т. за разлагането; 1 т. за обосновка защо се разглеждат само описаните два случая; 1 т. за изследване на случай А; 1 т. за изследване на случай Б; 1 т. за намиране на двата отговора.

Задача 8.4. Имам кариран лист K с размери 99×99 полета. „Линия“ ще наричаме всеки от 99-те реда и 99-те стълба на K. Разчертах K на квадрати 1×1, 2×2, 3×3, ..., 9×9 (поне по един от всеки от 9-те вида). Една от 198-те линии ще наричаме четна [нечетна], ако съдържа вътрешни точки на четен [нечетен] брой от квадратите на разделянето. Какъв е най-малкият възможен брой нечетни линии?

Решение. Да допуснем, че всички редове са четни линии. Тъй като по всяка линия в квадрати с четен размер има четен брой полета, то в квадрати с нечетен размер има нечетен брой полета. Така редът минава през нечетен брой квадрати с нечетен размер и тъй като той е четна линия, минава и през нечетен брой квадрати с четен размер. Следователно ако нарежем всеки четен квадрат от разделянето на хоризонтални лентички с ширина по един ред, броят на тези лентички е нечетно число (като сбор на 99 нечетни събираеми) и същевременно четно число (понеже всеки квадрат е нарязан на четен брой лентички): абсурд.
И така, има поне един нечетен ред и аналогично поне един нечетен стълб, т.е. има поне 2 нечетни линии. Ще покажем, че този брой може да е точно 2. Ако всички квадрати са 1×1, то всички линии са нечетни. При очертаване на четен квадрат четността на преминаващите през него линии се променя, а при очертаване на нечетен квадрат – не. Ако очертаем по диагонала подред квадрати 8×8, 6×6, 4×4 и 40 квадрата 2×2, то четни ще станат всички линии освен последния ред и последния стълб. Остава да добавим по един квадрат 3×3, 5×5, 7×7 и 9×9 (които да не се пресичат с вече очертаните и един с друг); това няма да промени четността на линиите.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за доказване, че има поне един четна линия; 3 т. за пример с две четни линии; 1 т. за завършване.

Задача 9.1. За реалните числа a и b е в сила неравенството

$$|7 + 9a + 18b| \leq 2.$$

Да се докаже, че уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има
а) два различни реални корена;
б) корен в интервала $[0, 1]$.

Решение. Ще използваме означенията $f(x) := x^2 + ax + b$ и $c := a + 2b$. Неравенството в условието е равносилно на $|7 + 9c| \leq 2$, откъдето

$$-2 \leq 7 + 9c \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -9 \leq 9c \leq -5 \quad \Leftrightarrow \quad c \in [-1, -5/9]. \qquad (1)$$

От тук

$$f(1/2) = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + b = \frac{1+2c}{4} \leq \frac{1 - 2\cdot 5/9}{4} \leq -\frac{1}{36} < 0 \qquad (2)$$

и тъй като старшия коефициент на квадратния тричлен е $1 > 0$, то $f(x) = 0$ има два различни реални корена, което доказва а).
За да докажем подточка (б) използваме наблюдението

$$f(0) + f(1) = b + 1 + a + b = 1 + c \geq 0. \qquad (3)$$

Това е възможно единствено, ако или $f(0) \geq 0$ или $f(1) \geq 0$. В комбинация с (2), заключаваме, че в първия случай уравнението има корен в интервала $[0, 1/2)$, а във втория – в интервала $(1/2, 1]$. С това задачата е доказана.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за подточка а) (по една за (1) и (2)); 4 т. за подточка б) (2 т. за (3), 1 т. за $\max\{f(0), f(1)\} \geq 0$ и 1 т. за довършване).

Забележка. Алтернативно доказателство на подточка а) е допускане на противното, от където $D = a^2 - 4b \leq 0$, следователно $2b \geq a^2/2$ и

$$c = a + 2b \geq a + \frac{a^2}{2} \geq -\frac{1}{2} > -\frac{5}{9},$$

което противоречи с (1).
Алтернативно доказателство на подточка б) е използването на еквивалентните преобразувания:

$$|7 + 9a + 18b| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad (7 + 9a + 18b)^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad (7 + 9a + 18b)^2 - 2^2 \leq 0$$
$$(9 + 9a + 18b)(5 + 9a + 18b) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 81\,(f(0) + f(1))\,(f(1/3) + f(2/3)) \leq 0,$$

заедно с (3) и оценката

$$f(1/3) + f(2/3) = \frac{1}{9} + \frac{a}{3} + b + \frac{4}{9} + \frac{2a}{3} + b = \frac{5}{9} + c \leq 0.$$

Този подход дава и допълнителна информация за разпределението на корените на $f(x)$, а именно че най-много един корен се съдържа в интервала $(1/3, 2/3)$.

Задача 9.2. Даден е квадрат $ABCD$. Избрани са точка M върху страната AB и точка N върху страната BC така, че $BM = CN$. Пресечната точка на DN и CM е означена с P. Ако $AP = AB$, да се пресметне отношението на лицата $S_{AMPD} : S_{ABCD}$.

Решение. Първо, ще докажем, че (1) M и N са средите на страните AB и BC. Имаме, че $\triangle CMB \cong \triangle DNC$ (първи признак) и значи

$$\measuredangle MPD = 180^\circ - \measuredangle MCB - \measuredangle DNC = 180^\circ - \measuredangle MCB - \measuredangle CMB = \measuredangle MBC = 90^\circ.$$

Следователно $CM \perp DN$. Да изберем точка Q върху страната CD, така че $DQ = CN$ и нека $AQ \cap DN = R$. Тогава $AQ \perp DN$ (доказва се абсолютно аналогично на $CM \perp DN$

или се използва ротация с център, центъра на квадрата и ъгъл $90°$, при която $M \to N$, $N \to Q$ и $P \to R$). От $AB = AP = AD$ следва, че точката A е центъра на описаната около триъгълник BPD окръжност и значи AQ се явява симетрала за DP. Тъй като $RQ \parallel PC$ (и двете са перпендикулярни на общата права DN) и R е среда на DP, то RQ се явява средна отсечка за $\triangle DPC$, откъдето $DQ = QC$. Следователно N е среда на BC и M е среда на AB.

Сега вече можем да изразим търсеното отношение. От

$$S_{AMPD} = S_{ABCD} - S_{\triangle CMB} - S_{\triangle DNC} + S_{\triangle CPN} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} + S_{CPN}$$

получаваме, че (2) $S_{AMPD} = S_{ABCD}/2 + S_{CPN}$. Да означим страната на квадрата с a и $PN = x$. Тогава $RQ = PN = x$ и $PC = 2RQ = 2x$. От Питагорова теорема за $\triangle CPN$ изразяваме $5x^2 = a^2/4$ и следователно

$$S_{CPN} = \frac{PN \cdot PC}{2} = x^2 = \frac{a^2}{20} = \frac{1}{20}S_{ABCD}. \qquad (3)$$

Обединявайки (2) и (3), заключаваме, че $S_{AMPD} : S_{ABCD} = 11 : 20$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за (1); по 1 т. за (2), (3) и довършване.

Задача 9.3. Нека означим с $s(N)$ сумата от цифрите на естественото число N. Например, $s(1983) = 1 + 9 + 8 + 3 = 21$. Да се намери най-малката възможна стойност на $s\left(p(n)\right)$, където

$$p(n) = n^2 + 41n + 92, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Да означим тази най-малка възможна стойност с s^*. Ще докажем, че $s^* = 5$. От признака за деление на 9 знаем, че $s(N) \equiv N \pmod 9$. Да разгледаме какви са възможните остатъци на $p(n)$ при деление на 9 (виж таблицата):

$$n^2 + 41n + 92 \equiv n^2 - 4n + 2 \equiv (n-2)^2 - 2 \equiv \{2, 5, 7, 8\} \pmod 9.$$

$n \pmod 9$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(n) \pmod 9$	2	8	7	8	2	7	5	5	7

От тук, $s(p(n)) \equiv \{2, 5, 7, 8\} \pmod 9$ и значи $s^* \geq 2$.

Непосредствено се проверява, че $p(n)$ е винаги четно, докато остатъците при деление на 5 са $\{2, 3, 4\}$. Следователно последната цифра на $p(n)$, отговаряща на остатъка по модул 10, е винаги измежду цифрите $\{2, 4, 8\}$. Тъй като $p(n) \geq p(1) = 134$, няма как да бъде едноцифрено и значи сумата от цифрите му винаги е строго по-голяма от цифрата на единиците, т.е., $s^* > \min\{2, 4, 8\} = 2$. Така, случая $s^* = 2$ е отхвърлен и значи $s^* \geq 5$

Съгласно таблицата с остатъци по модул 9 имаме, че единствено числа от вида $n = 9k + 6$ и $n = 9k + 7$ водят до $s(p(n)) \equiv 5 \pmod 9$. Непосредствена проверка показва, че

$$s(p(6)) = 3 + 7 + 4 = 14; \quad s(p(7)) = 4 + 2 + 8 = 14;$$
$$s(p(15)) = 9 + 3 + 2 = 14; \quad s(p(16)) = 1 + 0 + 0 + 4 = 5.$$

В заключение, $s^* = 5$ се достига при $n = 16$ и $p(16) = 1004$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за оценка $s^* \geq 5$; 2 т. за пример; 2 т. за довършване.

Задача 9.4. Даден е правоъгълник 20×21, който е разбит на 420 единични квадратчета. Две единични квадратчета ще наричаме *съседни*, ако имат поне един общ връх. Всяко от квадратчетата е оцветено в един от цветовете: бял, зелен и червен, като не съществуват три единични квадратчета с общ връх, които да са оцветени в трите цвята. Не е задължително в оцветяването да се срещат и трите цвята. Да се намери минималният брой двойки съседни едноцветни квадратчета и броя различни оцветявания, при които той се достига.

Решение. Да разгледаме по-общата задача, където дадения правоъгълник 20×21 е заменен с такъв с размери $m \times n$, $m \leq n$. За него нека означим минималния брой двойки едноцветни квадратчета с $p(m, n)$, а броя различни оцветявания, при които той се достига с $s(m, n)$. В задачата се търсят $p(20, 21)$ и $s(20, 21)$.
Едно оцветяване, ще наричаме *затворническо*, ако всеки от n-те стълба на правоъгълника е оцветен в един цвят и всеки два съседни стълба са оцветени в различни цветове. Двойка съседни едноцветни квадратчета, ще наричаме *добра*. Ще докажем, че $p(m, n) = (m - 1)n$ и той се достига единствено при затворническите оцветявания. Прилагаме индукция по m.
База: $m = 1$. В този случай не съществуват 3 единични квадратчета с общ връх, така че всяко оцветяване в три цвята върши работа. Очевидно, ако никои две съседни клетки не са едноцветни, то нямаме добра двойка и значи $p(1, n) = 0 = (1 - 1)n$. Всички такива оцветявания са затворнически, като в случая стълбовете на правоъгълника са едноклетъчни.
Индукционна стъпка: Нека сме доказали твърдението за m, т.е., за всяко $n \geq m$ $p(m, n) = (m - 1)n$ и минимума се реализира само при затворнически оцветявания. Да разгледаме оцветен правоъгълник A с размери $(m+1) \times (n+1)$ и за улеснение, да номерираме редовете му от долу нагоре, а стълбовете – от ляво надясно. Абстрахирайки се от $(m + 1)$-вия ред и $(n + 1)$-вия стълб, получаваме оцветен $m \times n$ правоъгълник $\widetilde{A}$, за който по индукционна хипотеза знаем, че съдържа поне $(m - 1)n$ добри двойки. Ще преброим минималния брой добри двойки, които съдържат клетка от последния ред и/или последния стълб. Първо да разгледаме 2×2 квадрата S в горния десен ъгъл на правоъгълника (образуван от пресичането на стълбове n и $n + 1$ с редове m и $m + 1$). Четирите единични квадратчета, които той съдържа имат общ връх и следователно са оцветени в най-много два цвята. Те генерират или 2 добри двойки (ако са оцветени по 2 в цвят) или 3 добри двойки (ако в единия цвят са оцветени 3 клетки, а в другия – една) или 6 добри двойки (ако всички клетки са едноцветни). Следователно, поне две нови добри двойки се съдържат в S, при това те ще са само две единствено, когато имаме по две клетки оцветени в два различни цвята. Да "приплъзнем" квадрата наляво (т.е., разглеждаме квадрата S', образуван от пресичането на стълбове $n - 1$ и n с редове m и $m + 1$). Както и преди, той съдържа поне две различни добри двойки, като най-много една може вече да сме я броили в S ($\{(m + 1, n), (m, n)\}$) и най-много една може да сме я броили в $\widetilde{A}$ ($\{(m, n - 1), (m, n)\}$). Но, ако и двете повтарящи се двойки са добри, то трите клетки $(m + 1, n), (m, n), (m, n - 1)$ са едноцветни и значи двойката $\{(m + 1, n), (m, n - 1)\}$ също е добра и досега не е била броена. В заключение, S' съдържа поне една нова добра двойка. Повтаряме процедурата, докато стигнем до първия

стълб, а след това приплъзваме ъгловия квадрат S и надолу по последните два стълба, докато стигнем до първия ред. По този начин общо разглеждаме $m+n-1$ два по два различни квадрата 2×2, като S генерира поне две нови добри двойки, а останалите $m+n-2$ – поне по една нова добра двойка. Следователно, съществуват поне $m+n$ различни добри двойки, които не са в $\widetilde{A}$ и значи A съдържа поне $(m-1)n+m+n=m(n+1)$ добри двойки. Оттук, $p(m+1,n+1)\geq m(n+1)$, като равенство се достига единствено, когато добрите двойки в $\widetilde{A}$ са $p(m,n)$ и всеки 2×2 квадрат, съдържащ или последния ред или последния стълб на A генерира по точно една нова добра двойка. Но тогава, съгласно индукционното предположение, правоъгълника $\widetilde{A}$ е оцветен затворнически и двойката $\{(m,n-1),(m,n)\}$ не може да е добра. Следователно, клетките в S' трябва да са по две в цвят, като двойката $\{(m+1,n),(m,n)\}$ задължително трябва да е добра, иначе S' ще генерира повече от една нова добра двойка и $p(A)>m(n+1)$. Оттук и S' е оцветен затворнически. Аналогично и за всички останали 2×2 квадрата на ляво от S'. Така получихме, че за да може $p(A)=m(n+1)$, първите n стълба на A задължително трябва да са оцветени затворнически. Накрая, щом $\{(m+1,n),(m,n)\}$ е добра двойка и S генерира само две добри двойки, той също е оцветен затворнически и двете клетки в $(n+1)$-вия стълб са едноцветни. Да разгледаме 2×2 квадрата S'', приплъзнат един ред надолу спрямо S. S'' трябва да генерира точно една нова добра двойка, като той няма обща добра двойка с S (квадратчетата (m,n) и $(m,n+1)$ са разноцветни) и има една обща двойка с $\widetilde{A}$ (поради гарантираното затворническо оцветяване на $\widetilde{A}$). Следователно, S'' съдържа точно две добри двойки и значи цвета на клетката $(m-1,n+1)$ съвпада с този на клетката $(m,n+1)$. Продължавайки надолу, заключаваме, че и последния стълб е едноцветен и значи A е оцветен затворнически. С това индукцията е завършена!

Връщайки се на оригиналната задача, получаваме, че минималния брой двойки съседни едноцветни квадратчета в оцветен правоъгълник 20×21 е $p(20,21)=19\cdot 21=399$, а броя различни оцветявания, при които той се достига е $3\cdot 2^{20}$, тъй като за да бъде едно оцветяване затворническо, трябва да изберем цвят за първи стълб по три различни начина и различен от предходния цвят за всеки от останалите стълбове до края.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор и на двата въпроса; 1 т. за вярна хипотеза за $p(m,n)$ и/или $s(m,n)$; 1 т. за доказателство на базата на индукцията; 4 т. за доказателство на индукционната стъпка.

Забележка. Минималният брой добри двойки $(\min(m,n)-1)\max(m,n)$ не зависи от броя цветове $k\geq 2$, използван при оцветяването, докато в общия случай броя добри оцветявания е $k\cdot(k-1)^{\max(m,n)-1}$.

Задача 10.1. Да се намерят всички положителни стойности на параметъра a, за които уравнението

$$\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x+1+\sqrt{(a+2)(2x-a)}}=\sqrt{2}$$

има повече от едно решение. За получените стойности за a определете решенията на уравнението.

Решение. Тъй като a е положителен параметър по условие, дефиниционната област за x е $2x - a \geq 0$, т.е., $x \geq a/2$. Умножаваме двете страни на уравнението с $\sqrt{2}$ и посредством еквивалентни преобразувания получаваме:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x - 2\sqrt{2ax - a^2}} + \sqrt{2x + 2 + 2\sqrt{(a+2)(2x-a)}} = 2 \qquad &\Longleftrightarrow \\ \sqrt{\left(\sqrt{2x-a} - \sqrt{a}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2x-a} + \sqrt{a+2}\right)^2} = 2 \qquad &\Longleftrightarrow \\ \left|\sqrt{2x-a} - \sqrt{a}\right| + \sqrt{2x-a} + \sqrt{a+2} = 2. \qquad &(1)\end{aligned}$$

Полагаме $t := \sqrt{2x-a}$ и разглеждаме двата случая:
1 сл. $t \geq \sqrt{a}$, което е еквивалентно на $x \geq a$. От (1) получаваме линейната връзка $2t = 2 + \sqrt{a} - \sqrt{a+2}$ и следователно уравнението има най-много едно решение (ако въпросното t удолетворява наложените допълнителни ограничения).
2 сл. $t \leq \sqrt{a}$, което е еквивалентно на $x \leq a$. От (1) получаваме $0 \cdot t = 2 - \sqrt{a} - \sqrt{a+2}$, от където уравнението или няма решение или има безброй много такива. Второто е възможно единствено, когато $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} = 2$. Директна проверка дава, че $a = 1/4$ е единствено решение. В този случай, от дефиниционното множество и допълнителните ограничения, получаваме, че решение на оригиналното уравнение е всяко x в интервала $[1/8, 1/4]$.
Окончателно, отговорът на задачата е $a = 1/4$ и $x \in [1/8, 1/4]$.

Оценяване. (6 точки) По 1 т. за представяне като точен квадрат за всеки от изразите под двата корена; 1 т. за (1); 1 т. за разглеждане/доказване на 1 сл.; 2 т. за разглеждане/доказване на 2 сл.

Задача 10.2. В остроъгълен триъгълник ABC са построени височините AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$). През върха C е построена права, която пресича отсечката A_1B_1 в точка F и страната AB в точка K така, че $\dfrac{A_1F}{FB_1} = \dfrac{AK}{KB}$. Да се докаже, че е в сила следното отношение между лицата на триъгълниците:

$$\left(\frac{S_{\triangle AFB}}{S_{\triangle A_1B_1K}}\right)^2 = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C}}.$$

Решение. Ще използваме стандартните означения за триъгълник. От съображения за симетрия, без ограничение на общността можем да допуснем, че $AC \geq BC$, респективно $\alpha \leq \beta$. Четириъгълникът ABA_1B_1 е вписан, следователно $\measuredangle B_1A_1C = \alpha$ и $\measuredangle CB_1A_1 = \beta$, респективно $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. От условието и подобието,

$$\frac{A_1F}{FB_1} = \frac{AK}{KB} \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1B_1}{FB_1} = \frac{AB}{KB} \;\Leftrightarrow\; \frac{FB_1}{KB} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{CB_1}{CB} \;\Rightarrow\; \triangle FB_1C \sim \triangle KBC$$

и значи CK е ъглополовяща на $\measuredangle ACB$. Да означим петите на височините от F и K към AB и A_1B_1 съответно с F_1 и K_1. Лесно се съобразява, че F_1 и K_1 са разположени в една и съща полуравнина спрямо KF и подобно на ABA_1B_1, четириъгълникът KF_1K_1F е вписан. При това, съгласно допускането, $\measuredangle K_1FK = \measuredangle B_1FC = \measuredangle F_1KF$, от където KF_1K_1F е равнобедрен трапец и $KK_1 = FF_1$. Окончателно,

$$\left(\frac{S_{\triangle AFB}}{S_{\triangle A_1B_1K}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{AB\cdot FF_1}{2}}{\frac{A_1B_1\cdot KK_1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C}}.$$

Оценяване. (6 точки) 3 т. за CK ъглополовяща на $\measuredangle ACB$; 2 т. за $KK_1 = FF_1$; 1 т. за довършване.

Задача 10.3. Даден е правоъгълник 20×21, който е разбит на 420 единични квадратчета. Две единични квадратчета ще наричаме *съседни*, ако имат поне един общ връх. Всяко от квадратчетата е оцветено в един от цветовете: бял, зелен и червен, като не съществува връх, за който четирите му съседни квадратчета да са оцветени във всичките три цвята. Не е задължително в оцветяването да се срещат и трите цвята. Да се намери минималният брой двойки съседни едноцветни квадратчета и броя различни оцветявания, при които той се достига.

Решение. Виж Задача 9.4.

Задача 10.4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които при всеки избор на двойка естествени числа m и n, числото $f(n) + m$ да дели $|f(m) - n^4|$.

Решение. Ще докажем, че единствено $f(n) = n^2$ удовлетворява условието.
Замествайки с $(m, n) = (1, 1)$ и отчитайки, че за всяко естествено число N, $N - 1 < N + 1$, заключаваме, че $f(1) = 1$.
Полагайки $n = 1$, получаваме че $(m + 1)|(f(m) - 1)$ и значи за всяко естествено m, $f(m) = g(m)(m + 1) + 1$, като $g(m) \geq 0$.
Нека сега вземем $m = 1$ и $n = p + 1$, където p е нечетно просто число. Тогава

$$(g(n)(n+1)+2)\,\Big|\,(n^4-1) = (n-1)(n+1)(n^2+1) \implies (g(n)(n+1)+2)\,\Big|\,(n-1)(n^2+1),$$

защото $n + 1 = p + 2$ е нечетно и НОД$\big(g(n)(n + 1) + 2, n + 1\big) = 1$. Освен това, ако допуснем, че

$$g(n)(n+1)+2 \equiv 0 \pmod{n-1} \Rightarrow g(n)(p+2) \equiv -2 \pmod{p} \Rightarrow g(n) \equiv -1 \pmod{n-1},$$

то $g(n) \geq 1$, $g(n) = h(n)(n - 1) - 1$, $g(n)(n + 1) + 2 = \big(h(n)(n + 1) - 1\big)(n - 1)$ и

$$\begin{aligned}
(h(n)(n+1)-1) &\,\Big|\, \Big((n^2+1) = (n+1)(n-1)+2\Big) \Rightarrow \\
(h(n)(n+1)-1) &\,\Big|\, \big((n+1)(n-1)+2+2\big(h(n)(n+1)-1\big)\big) \Rightarrow \\
(h(n)(n+1)-1) &\,\Big|\, \big((n+1)\big(n-1+2h(n)\big)\big) \Rightarrow \\
(h(n)(n+1)-1) &\,\Big|\, \big(n-1+2h(n)\big).
\end{aligned}$$

Това е невъзможно, тъй като директна проверка показва, че за големи n единствено при $h(n) = 1$ делителя остава по-малък от делимото, а последното води до $n|(n+1)$, което не е вярно. Следователно, допускането ни е грешно и значи НОД$(n-1, f(n)+1) = 1$, т.е., $(g(n)(n+1)+2)\,|(n^2+1)$. Последното е равносилно на

$$\begin{aligned}
&(g(n)(n+1)+2) \;\Big|\; ((n-1)(n+1)+2) \;\Leftrightarrow \\
&(g(n)(n+1)+2) \;\Big|\; \big((n-1)(n+1)+2-\big(g(n)(n+1)+2\big)\big) \;\Leftrightarrow \\
&(g(n)(n+1)+2) \;\Big|\; \big(\big(n-1-g(n)\big)(n+1)\big) \;\Leftrightarrow \\
&(g(n)(n+1)+2) \;\Big|\; (n-1-g(n)).
\end{aligned}$$

При последното сравнение отново използвахме нечетността на $n+1$. Но

$$g(n)(n+1)+2 > |n-1-g(n)|, \qquad \forall n \geq 4.$$

Следователно $g(n) = n-1$, т.е., $g(p+1) = p$ за всяко нечетно просто p. От тук $f(p+1) = g(p+1)(p+2)+1 = p(p+2)+1 = (p+1)^2$.
Накрая, полагайки $n = p+1$, където p е нечетно просто число и прилагайки тъждеството $f(m) - m^2 = f(m) - n^4 + (n^2-m)(n^2+m)$ получаваме, че за произволно m е в сила $(n^2+m)|(f(m)-m^2)$, т.е., $f(m) = m^2$ за всяко m.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $f(1) = 1$ и изказана хипотеза за отговор $f(n) = n^2$; 1 т. за $f(n) = g(n)(n+1)+1$; 3 т. за $f(p+1) = (p+1)^2$; 2 т. за довършване.

Задача 11.1. Редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворява условието

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n, n = 0, 1, \cdots .$$

а) Да се изрази общият член a_n чрез a_0 и n.
б) Да се намери a_0, ако $a_{n+1} > a_n$ за всяко n.

Решение. а) Изразяваме последователно

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1} = 2^{n-1} - 3(2^{n-2} - 3a_{n-2}) = 2^{n-1} - 3.2^{n-2} + 3^2.a_{n-2}$$

и продължавайки по индукция, намираме, че

$$a_n = 2^{n-1}\left(1 - \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \ldots + (-1)^{n-1}.\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right) + (-1)^n 3^n.a_0$$

Като сумираме геометричната прогресия в скобите, получаваме, че

$$a_n = \frac{1}{5}.2^n\left(1 + (-1)^{n-1}.\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) + (-1)^n.3^n.a_0,$$

т. е.
$$a_n = \frac{1}{5}(2^n + (-1)^{n-1}3^n) + (-1)^n.3^n.a_0.$$
б) Изразяваме разликата $a_{n+1} - a_n$:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}(2^n + (-1)^n.4.3^n) + (-1)^{n+1}3^n.4.a_0.$$
Така получаваме, че
$$\frac{a_{n+1} - a_n}{3^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n.4.\left(\frac{1}{5} - a_0\right).$$
Така, ако $a_0 \neq \dfrac{1}{5}$, при достатъчно големи n, знакът на разликата ще зависи от знака на $(-1)^n.4.\left(\frac{1}{5} - a_0\right)$ и ще се променя в зависимост от четността на n. Ако пък $a_0 = \frac{1}{5}$, то $a_{n+1} - a_n > 0$. Следователно $a_0 = \dfrac{1}{5}$.

Оценяване. (6 точки) а) 2 т. за получаване на израз за a_n като безкрайна сума; 1 т. за сумиране на геометричната прогресия; б) 1 т. за изразяване на разликата $a_{n+1} - a_n$; 2 т. за намиране на $a_0 = \dfrac{1}{5}$.

Задача 11.2. Четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 5$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 3$ cm и $DA = 8$ cm е вписан в окръжност. На лъчите $DA^{\rightarrow}$ и $DC^{\rightarrow}$ са избрани точки съответно P и Q така, че A е между P и D, а C е между D и Q. Точка R е такава че $RP = CQ$ и $RQ = AP$. Ако правите RB и PQ са перпендикулярни, да се намери разликата $CQ - AP$.

Решение. Ако $\alpha = \measuredangle BAD$, то $\measuredangle BCD = 180^\circ - \alpha$. От косинусовата теорема за $\triangle BAD$ и $\triangle BCD$ получаваме:
$$5^2 + 3^2 + 2.15\cos\alpha = BD^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8\cos\alpha.$$
Следователно
$$34 + 30\cos\alpha = 89 - 80\cos\alpha \iff 110\cos\alpha = 55 \iff \cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \alpha = 60^\circ.$$
От косинусовата теорема за $\triangle PBA$ и $\triangle QBC$ получаваме:
$$PB^2 = AP^2 + 25 - 10.AP.\cos 120^\circ = AP^2 + 5AP + 25,$$
$$QB^2 = CQ^2 + 25 - 10.CQ.\cos 60^\circ = CQ^2 - 5CQ + 25.$$
Условието $RB \perp PQ$ е еквивалентно на
$$\begin{aligned} RP^2 + QB^2 = RQ^2 + PB^2 \quad &\iff \quad CQ^2 + QB^2 = AP^2 + PB^2 \\ &\iff \quad CQ^2 + (CQ^2 - 5CQ) = AP^2 + (AP^2 + 5AP) \\ &\iff \quad 2(CQ^2 - AP^2) = 5(CQ + AP) \\ &\iff \quad CQ - AP = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за намиране на $\alpha = 60°$; по 1 т. за използване на косинусова теорема за $\triangle PBA$ и $\triangle QBC$; 1 т. за изпозване на условието за четириъгълник с перпендикулярни диагонали; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа, които са произведение на две прости числа и могат да се представят във вида:

$$((n+1)^2 + (n+4)^2)^n - n^n$$

където n е естествено число.

Решение. Нека T е число с даденото свойство. Да допуснем, че n може да се представи като произведение на две (не непременно различни) есетествени числа, т.е. $n = ab$, $a > 1$ и $b > 1$. Тогава

$$\begin{aligned} T = ((n+1)^2 + (n+4)^2)^{ab} - n^{ab} &= (((n+1)^2 + (n+4)^2)^a - n^a)P(n) = \\ &= ((n+1)^2 + (n+4)^2 - n)Q(n)P(n) \end{aligned}$$

и тъй като $(n+1)^2 + (n+4)^2 - n > 1$, то T се представя като произведение на три числа, всяко от които е по-голямо от 1, което е противоречие с условието.
Следователно n е просто число. Тогава

$$T = ((n+1)^2 + (n+4)^2)^n - n^n = ((n+1)^2 + (n+4)^2 - n)S(n) = (2n^2 + 9n + 17)S(n)$$

и ако n е нечетно число, то $2n^2 + 9n + 17 > 2$ е четно число. Следователно $2n^2 + 9n + 17 = 2m$ и получихме, че $T = 2mS(n)$, което е противоречие с условието.
Понеже n е четно просто число, то $n = 2$ и тогава $T = 45^2 - 2^2 = 2021$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране на решението; 1 т. за това, че n е четно число; 5 т. за това, че n е просто число.

Задача 11.4. Нека A е множеството от всички редици с дължина k съставени от нули и единици. Редица S съставена от нули и единици се нарича *чудесна*, ако за всяка редица u от A редицата uu се съдържа в S.
С $l(k)$ означаваме дължината на най-късата чудесна редица.
а) Да се намери $l(2)$.
б) Да се докаже, че $l(k) \geq 2^{k+1} + k - 1$.

Решение. а) Ще докажем, че $l(2) = 12$. Редицата 111101010000 е с дължина 12 и има исканото свойство. Да допуснем, че има чудесна редица S с дължина 11. Тъй като 0000 и 1111 се срещат в S, то в нея има още три символа. Ако обърнем редицата S (т.е. я прочетем отзад напред), новата редица също е чудесна. Също така, ако в S променим всички нули на единици и всички единици на нули, новата редица също е чудесна. Следователно без ограничение можем да считаме, че редицата S е от някои от следните видове:
$a_1a_2a_3 00001111$; $a_1a_2 0000 a_3 1111$; $a_1a_2 00001111 a_3$
$a_1 0000 a_2a_3 1111$; $0000 a_1a_2a_3 1111$; $a_1 0000 a_2 1111 a_3$.

Всеки от символите a_1, a_2 и a_3 е 0 или 1, т.е. общо за тях има 8 възможности. Във всеки от тези 8 случая директно се проверява, че поне една от редиците 1010 и 0101 не се появява в S.

б) За дадено естествено число k нека $S = a_1a_2 \dots a_n$ е чудесна редица с минимална дължина. Ако u е редица с дължина k редицата uu ще наричаме *квадратна редица.* Според дефиницията на чудесна редица в S се срещат всички квадратни редици.
Да разгледаме всички двойки (T, a), където $T = uu$ е квадратна редица, а a е символ от редицата S, който се среща в редицата T от S. При това ако една квадратна редица $T = uu$ се среща повече от един път в S, разглеждаме само първото от тези появявания.
Например, при $k = 2$ за редицата $a_1a_2 \dots a_{12} = 111101010000$ от а) тези двойки са:

$$(1111, a_1), (1111, a_2), (1111, a_3), (1111, a_4), (0101, a_5), (0101, a_6), (0101, a_7), (0101, a_8),$$

$$(1010, a_6), (1010, a_7), (1010, a_8), (1010, a_9), (0000, a_9), (0000, a_{10}), (0000, a_{11}), (0000, a_{12})$$

Първо ще оценим тези двойки като разглеждаме първият им елемент (т.е. квадратните редици), а след това като разглеждаме втория елемент (т.е. символите от редицата S)
1. Да разгледаме фиксирана квадратна редица uu. Тази редица има дължина $2k$ и с всеки символ a_i от нея тя образува една двойка (uu, a_i). Следователно тя участва в точно $2k$ двойки (както в горния пример всяка квадратна редица участва в 4 двойки). Всички редици с дължина k са 2^k, като толкова са и квадратните редици. Следователно всички квадратни редици участват в $k2^{k+1}$ двойки.
Това означава, че в една чудесна редица трябва да има поне $k2^{k+1}$ двойки (T, a), където $T = uu$ е квадратна редица, а a е символ от редицата S.

2. Ще оценим разглежданите двойки, като за всеки символ от чудесната редица $S = a_1a_2 \dots a_n$ определим колко пъти този символ може да участва в такава двойка. Първият символ a_1 може да участва само в една квадратна редица – това е редицата от първите $2k$ символа на S (при условие, че тази редица е квадратна). Следователно първият символ a_1 участва в най-много една двойка (T, a) от разглеждания вид. Вторият символ a_2 може да участва само в две квадратни редици – това са двете редици от $2k$ символа, започващи съответно от a_1 и a_2 (при условие, че и двете са квадратни). Следователно a_2 участва в най-много две двойки (T, a) от разглеждания вид. Аналогично a_{k-1} може да участва в най-много $k - 1$ двойки (T, a) от разглеждания вид и a_k може да участва в най-много k двойки (T, a) от разглеждания вид.
Да разгледаме символа a_{k+1}. Да означим редицата от първите $2k$ символа с A, а редицата с дължина $2k$ започваща от a_{k+1} с B. Ако a_{k+1} участва в двойка и с двете редици A и B, то A и B са квадратни с дължина $2k$ и тогава $A = B$.
Това означава, че първото появяване на редицата $T = A = B$ е редицата A и всички двойки на редицата B не се броят. Следователно a_{k+1} може да участва в най-много k двойки от разглеждания вид.
Аналогично получаваме, че всеки символ преди последните k се появява най-много в k двойки. За последните k символа е в сила свойството на първите k, но в обратен ред (т.е. последния символ участва в най-много една двойка, предпоследния в най-много две и т.н.).

Получихме, че първите $k-1$ символа (както и последните $k-1$) могат да участват в най-много $1+2+\cdots+k-1$ двойки. Останалите символи са $n-2(k-1)$ и всеки от тях може да участва в най-много k двойки. Следователно най-големия брой двойки, в които участват символите на редицата е:

$$2(1+2+\cdots+k-1)+(n-2(k-1))k = k(n-k+1).$$

Тъй като това е най-големият възможен брой, а в редицата със сигурност трябва да има $k2^{k+1}$ двойки, то този брой трябва да е поне $k2^{k+1}$, откъдето получаваме:

$$k(n-k+1) \geq k2^{k+1} \iff n \geq 2^{k+1}+k-1.$$

Това означава, че за всяка чудесна редица с дължина n е изпълнено $n \geq 2^{k+1}+k-1$, т.е. $l(k) \geq 2^{k+1}+k-1$.

Оценяване. (7 точки) а) 1 т. за пример на чудесна редица с дължина 12; 1 т. за доказване, че $l(2) > 11$; б) 5 т. за пълно решение;

Задача 12.1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$ и $AD = AE$, където $E = AC \cap BD$. Права през D пресича диагонала AC и правата BC в точки M и N така, че

$$\frac{AM}{CM} = \frac{NB}{AB} = k.$$

Да се намери k.

Решение. Ясно е, че $N \in CB^{\rightarrow}$. Да допуснем, че N е между C и B. Тогава

$$\frac{CB}{AB} > \frac{NB}{AB} = \frac{AM}{CM} > \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CB},$$

откъдето $AB < CB$. От друга страна,

$$\measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle CBD - \measuredangle BEC = 180^\circ - \measuredangle CBD - \measuredangle AED$$

$$180^\circ - \measuredangle ABD - \measuredangle ADE = \angle BAD > \angle BAC,$$

което е противоречие. Значи (1) B е между C и N.

Нека сега правата през D, успоредна на AC, пресича правите BC и NA в точки P и Q. Понеже $\measuredangle ABD = \measuredangle PBD$ и $\angle ADB = \measuredangle AED = \measuredangle PDB$, то $\triangle ABD \cong \triangle PBD$. В частност, $AB = PB$ и тогава

$$\frac{QD}{PD} = \frac{AM}{CM} = \frac{NB}{PB}.$$

Следователно $BD || NQ$, откъдето $\measuredangle BAN = \measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \measuredangle BNA$. Значи $AB = NB$, т.е. $k = 1$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за (1) и 4 т. за довършване.

Задача 12.2. Съществува ли полином P с реални коефициенти от степен 2021 такъв, че неговите корени и един от корените на P' са реални числа, които (в някакъв ред) образуват геометрична прогресия с частно $q \in (1, 2)$?

Решение. Да, съществува за произволна степен $n \geq 3$.

Ако $P(x) = (x-1)\prod_{k=2}^{n}(x-q^k)$, то $P'(x) = P(x)R(x)$, където

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x-q^k}.$$

Следователно $qR(q) = S(q)$ при $n \geq 3$ и $q \neq \pm 1$, където

$$S(q) = 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{1-q^{k-1}}.$$

Понеже S е непрекъсната функция в $[\sqrt{2}, 2]$, $S(\sqrt{2}) \leq 0$ и

$$S(2) > 1 - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^{k-2}} > 0,$$

то $S(q) = 0$ (т.е. $P'(q) = 0$) за някое $q \in [\sqrt{2}, 2)$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за подходящо уравнение за q и 3 т. за довършване.

Задача 12.3. Нека A е множеството от всички редици с дължина k съставени от нули и единици. Редица S съставена от нули и единици се нарича *чудесна*, ако за всяка редица u от A редицата uu се съдържа в S.

С $l(k)$ означаваме дължината на най-късата чудесна редица.

а) Да се намери $l(2)$.

б) Да се докаже, че $l(k) \geq 2^{k+1} + k - 1$.

Решение. Виж Задача 11.4.

Задача 12.4. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството от положителните реални числа. Да се намерят всички двойки $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, за които съществува функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такава, че

$$f(x) \geq f(f(x)) + \alpha x^\beta, \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{R}^+.$$

Решение. Нека първо $\beta \neq 1$. Тогава съществува единствено $x_0 \in \mathbb{R}^+$ такова, че $x_0 = \alpha x_0^\beta$. Нека $x \geq x_0$. Имаме, че

$$f(x) > \alpha x^\beta \geq \alpha x_0^\beta = x_0.$$

Тогава $f(f(x)) > x_0$ и значи

$$f(x) \geq f(f(x)) + \alpha x^\beta > 2x_0.$$

По индукция следва, че $f(x) > nx_0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. При $n \to \infty$ получаваме противоречие. Нека сега $\beta = 1$ и $\alpha > 1/4$. Имаме, че $f(x) > \alpha x$ и тогава

$$f(x) \geq f(f(x)) + \alpha x > \alpha f(x) + \alpha x \geq (\alpha^2 + \alpha)x.$$

Полагаме $a_1 = \alpha$ и $a_{n+1} = a_n^2 + \alpha$ при $n \in \mathbb{N}$. По индукция следва, че $f(x) > a_n x$, т.е. $a_n < f(x)/x$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Понеже $\alpha > 1/4$, то

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \alpha - a_n > (a_n - 1/2)^2.$$

Значи (a_n) е растяща и ограничена редица. Следователно тя е сходяща и за нейната граница l имаме, че $l^2 = l + \alpha$. Това е невъзможно при $\alpha > 1/4$.
При $\beta = 1$ и $\alpha \leq 1/4$ съществува $c \in \mathbb{R}^+$, за което $c = c^2 + \alpha$, Тогава за $f(x) = cx$ имаме, че

$$f(x) = f(f(x)) + \alpha x.$$

Оценяване. (7 точки) По 2 т. за отхвърляне на всеки от случаите $\beta < 1$, $\beta > 1$ и $\beta = 1$, $\alpha > 1/4$, и 1 т. за пример.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2 – Емил Карлов; 9.1, 9.3 – Станислав Харизанов; 9.2 – Максим Йорданов; 9.4=10.3 – Александър Иванов; 10.1, 10.2 – Диана Данова; 10.4 – Любен Личев; 11.1 – Аделина Чопанова; 11.2, 11.3, 11.4=12.3 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов.